

# LAS FRONTERAS MATEMÁTICAS DE GAMBIA



Orillas del río Gambia / Fuente: Vicenteboas.

Hace poco unas amigas me invitaron a unirme a ellas en un viaje que tenían previsto hacer a Gambia. ¿Ilusionante, no? Y como todo viaje empieza por un mapa, el de Gambia, por insólito, no lo había visitado nunca con detenimiento, me zambullí en su contemplación durante un buen rato. Un pequeño país, de hecho el menor de África tierra adentro, con sólo 10.500 kilómetros cuadrados de superficie y una población de unos 1,7 millones de personas. Se adentra como un dedo en el gran Senegal, siguiendo el curso del río Gambia, de manera que está rodeado en todos lados por éste, salvo la pequeña porción que bordea el océano Atlántico.

Álvaro Martínez Sevilla | Universidad de Granada

Inmediatamente la forma del país llamó mi atención. ¿Y esas fronteras curvas que aparecen delimitándolo? Salvo la parte recta, cuya frontera parece estar hecha con regla, de la parte baja del río, la que desemboca en el mar, las fronteras de las tierras que rodean a la parte media y alta del río parecen globosas, casi hechas con compás. ¡Qué caso más extraño!

Un matemático no deja pasar una oportunidad así, de manera que intenté curiosear el motivo de esta extraña frontera curva. Y acudí a la [Wikipedia](#), que me completó algo la información, pero sin aclararme nada acerca

de la forma de sus fronteras: el río Gambia discurre por el centro del país, y debió ser una vía crucial de comunicación en la época del más cruel colonialismo, el que traficaba con esclavos, de forma que primero fue posesión portuguesa hasta que fue cedida por los lusos a Gran Bretaña, quien la mantuvo como colonia hasta que logró su independencia muy recientemente, en febrero de 1965. Y eso es todo, bueno... y que su bandera coincide con la de la población manchega de Osa de la Vega, aunque, honestamente, no creo que sus habitantes ni los colores de su bandera hayan tenido algo que ver con la delimitación de las fronteras del país.



Las fronteras 'rectas' de la descolonización en África.

Así que de aquí poco pude concluir acerca de sus fronteras, salvo que proceden, como la de tantos países de África, de un proceso de descolonización. Pero, si fuese por causa colonial, ¿habría más países en el mundo, particularmente en África, con fronteras curvas, no?

Pues no, un examen minucioso al mapa de África y a las fronteras de todos los países del mundo me llevó a la conclusión de que este es un caso único. Los países descolonizados de las potencias coloniales de los siglos XVIII y XIX suelen tener, en ausencia de accidentes geográficos claros de delimitación, como ríos, lagos o montañas, las fronteras trazadas con tiralíneas. El método más fácil de hacer una frontera: fijar un punto por donde pasa y trazar una recta, que es fácil de dibujar, de delimitar sobre el terreno y para dirimir disputas en caso necesario. Pero ni uno sólo con la frontera trazada a compás.

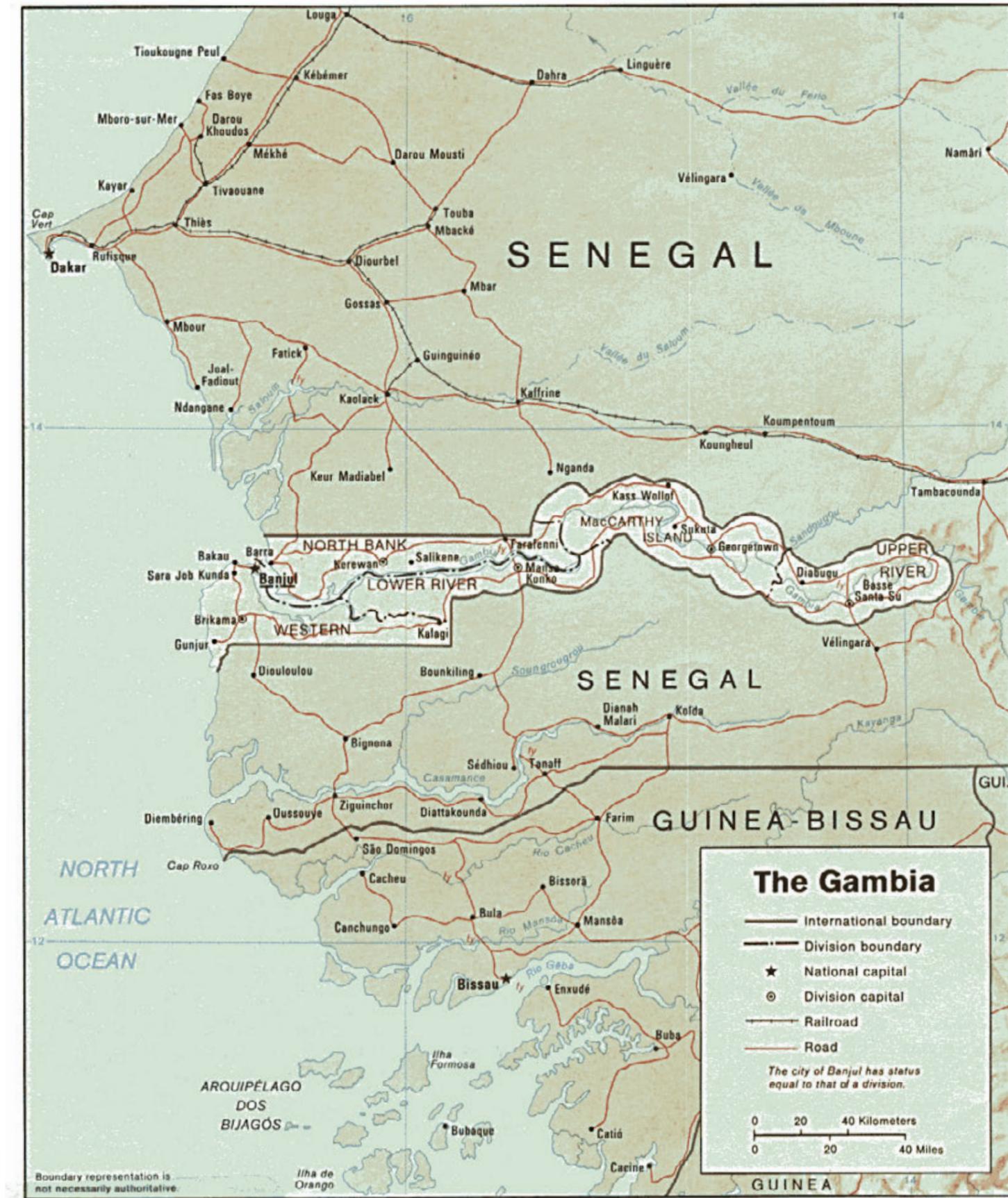
### Una frontera única

Aunque en vista de zoom muy grande, pudiera parecer que algunos países tienen zonas curvas en sus fronteras, es sólo un efecto de la simplificación de escala. Cuando nos vamos a un mapa detallado, o hacemos zoom en *Google Maps*, por ejemplo, vemos como esas fronteras se desvanecen en miríadas de entrantes y salientes, en recovecos caóticos y sin orden, en líneas que en nada recuerdan a la suavidad y curvatura constante de una circunferencia, o un arco

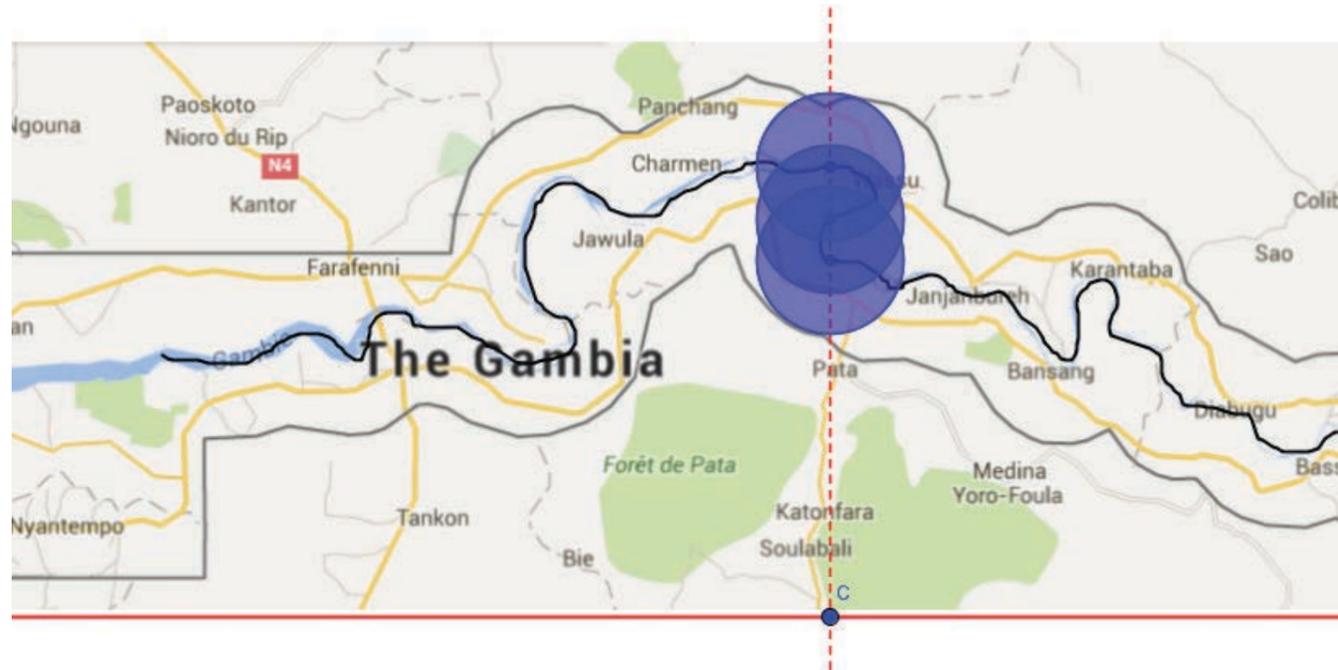
de ella. Sin embargo, haciendo zoom sin miramientos sobre nuestro pequeño país vemos con claridad esas suaves y regulares curvas que da el compás, el sueño geográfico de un matemático.

¿Habrá, pues, un geógrafo con obsesión geométrica tras esta frontera? Un caso único en el planeta que acrecienta el misterio. La solución matemática a este enigma pasa por la noción de lugar geométrico. Éste puede definirse, simplificando, como el conjunto de puntos de un plano (o de un espacio de dimensión superior) que cumplen una determinada propiedad.

Los lugares geométricos nos permiten transportar un concepto abstracto, dado por una ecuación algebraica o una función de una manera muy visual, ya que dibujado permite ver el conjunto de puntos que cumplen aquella ecuación, lo que ofrece comúnmente un aspecto gráfico muy reconocible: si nos restringimos a un plano, ya los puntos dejan de ser pares de coordenadas (x, y) ligados por operadores aritméticos y constantes elusivas, para convertirse en el dibujo de un objeto bien reconocible: una recta, una circunferencia, una elipse o más singularmente una curva de nombre inaudito. Dicho más llanamente, un lugar geométrico nos permite pasar del concepto algebraico, por tanto simbólico, difícilmente visible o intuible para un lego, aunque fácilmente calculable, al concepto geométrico, fácilmente reconocible o visible, aunque con más complejidad de cálculo.



El mapa de Gambia rodeado por Senegal.



Las fronteras de Gambia como lugar geométrico.



Así por ejemplo, podemos definir el lugar geométrico de los puntos del plano dado por la propiedad: "Cada punto del mismo dista exactamente una misma distancia  $d$  de un punto fijo, llamado  $C$ ". Ésta es una definición muy fácil, y casi todos podremos reconocer, por las matemáticas escolares, que el conjunto de puntos del plano que cumplen esa propiedad es una circunferencia con centro en el punto  $C$  y radio  $d$ . En el despiece, recomendable para aquellos que quieran conocer algo más de este concepto matemático, se citan otros ejemplos de lugares geométricos planos, algunos también muy conocidos, y otros menos, que servirán para afianzar la definición.

Pues bien, ya estamos más cerca de desentrañar nuestro enigma. El río Gambia atraviesa el país en su parte central y alta recorriéndolo por la mitad, con sus meandros, cambios de dirección y ensanchamientos. Y a ambos lados parecemos tener unas franjas de tierra de anchura constante desde el borde del río, como si

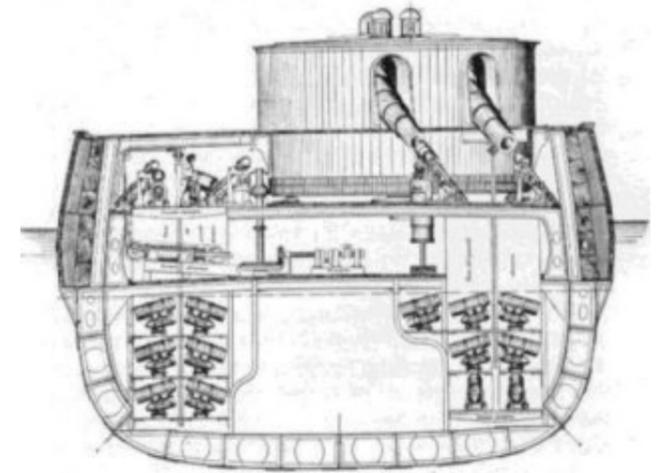
deslizáramos un cepillo sobre el mapa guiado por un rail central superpuesto a este río. El resultado sería el mapa de Gambia. En términos geométricos, lo que hemos hecho para dibujar las fronteras es definir el lugar geométrico de los puntos que distan una distancia fija  $d$  de cada uno de los márgenes del río (en nuestro caso  $d$  es aproximadamente 10 kilómetros). Y el territorio de Gambia es por tanto todo punto que esta a menos de esta distancia de 10 kilómetros (en sus partes central y superior). Ya tenemos una caracterización geométrica del mapa de Gambia. Si el río Gambia fuese un objeto geométrico de fácil descripción (recta, poligonal o curva entre dos o varios puntos, por ejemplo) sería mucho más fácil de procesar por nuestro software matemático, pero a pesar de ello, podemos intentar, con la ayuda de *GeoGebra*, un software libre ideal para aprender y manipular matemáticas, calcular y representar este lugar geométrico, que vemos que coincide casi por completo con el mapa suministrado de Gambia.

Para ello hemos dibujado una recta horizontal base y un trazo a mano alzada que trata de seguir el río (aunque no lo hace con toda fidelidad, nuestro pulso y la herramienta manual no permiten más precisión). Sobre la recta base trazamos una perpendicular que intersectará al curso del río, a veces en múltiples puntos, y que nos va a servir para ir deslizando el punto por el río, como si se tratase de un barco navegándolo. Ahora definimos un círculo de radio unos 10 kilómetros (en la escala del mapa), con centro en ese punto deslizante del río. Este círculo será múltiple cuando sean varios los puntos de intersección de la recta vertical deslizante con el dibujo a mano alzada del río.

Al deslizar el punto  $C$  por la recta base vemos como los bordes de los círculos definen las fronteras de Gambia con bastante precisión. Es decir, la superficie del mapa barrida por los círculos se corresponde con el territorio del país.

Algunas pequeñas diferencias que pueden observarse (por ejemplo, en la imagen titulada 'Las fronteras de Gambia como lugar geométrico') son debidas, por un lado, a las imprecisiones en el dibujo a mano alzada del río, que dan lugar a pequeñas variaciones en la frontera. Un dibujo más afinado daría lugar a fronteras más precisas. Por otro, las variaciones puntuales que sobre esta frontera así delimitada realizó *a posteriori* una comisión geográfica: es conocido que los geógrafos nunca se contentan con una buena definición matemática, y prefieren una singularidad sobre el terreno a la que aplicarle criterios propios. Asimismo, el dibujo no coincidente también nos puede informar de variaciones históricas en el curso del río no datadas o conocidas. En casi 130 años desde que se realizó la frontera los meandros del río han podido variar considerablemente su curso, o las orillas colmatarse de aportes aluviales, disminuyendo así el alcance de los 10 kilómetros. La frontera así dibujada hoy nos informa también de los cambios geográficos con respecto a la frontera de hace más de un siglo.

Enigma, pues, resuelto, desde un punto de vista matemático, pero nos queda rematar faena indagando en los motivos que llevaron a utilizar una propiedad geométrica para definir estas fronteras, un caso único en el mundo. La respuesta, como en tantas otras ocasiones, está escrita por la historia. No se trata del delirio geométrico de un geógrafo delimitador de fronteras, ni siquiera de la abstracción erudita de una comisión de descolonización. Se trata de la historia de la colonia gambiana bajo el poder británico.

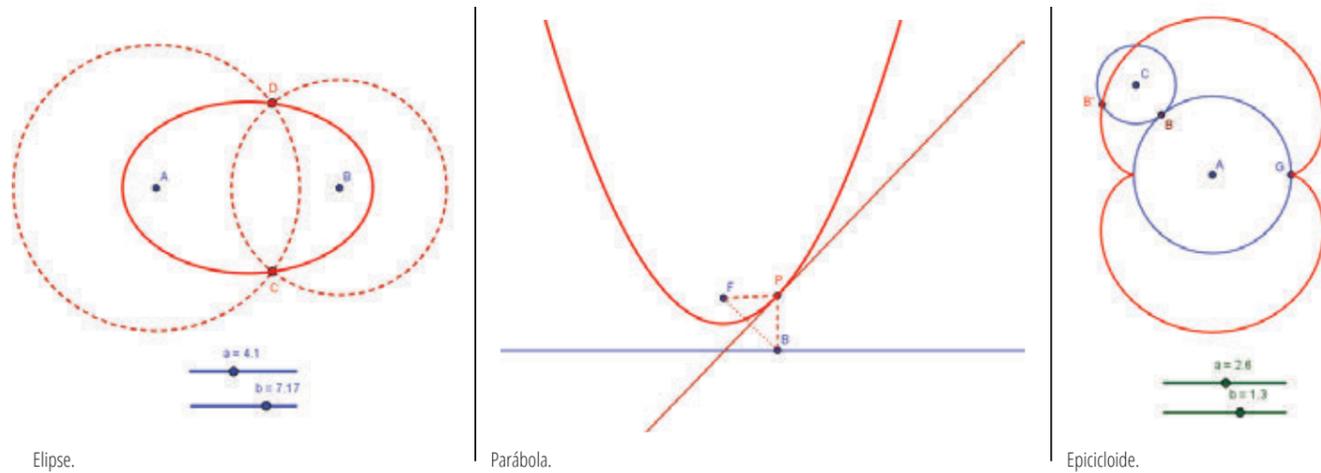


Barco con un ingenioso sistema de troneras para introducir los cañones y permitir su carga frontal sin exponer los marineros a la metralla.

### Explicación histórica

Dado que Gambia estaba rodeada por todos lados por Senegal, a su vez colonia francesa, los británicos se afanaron en defenderla de las tropas vecinas. Como el río vertebraba el país de Este a Oeste, y a su vez era el mejor medio de comunicación, los británicos lo protegieron con cañoneras fluviales que patrullaban constantemente el río. El alcance de su defensa, y por tanto del territorio protegido, era el propio alcance de los proyectiles que eran capaces de disparar estas patrulleras: se aproximaban a las orillas del río de cada lado y desde ahí lanzaban sus proyectiles hasta el límite de lo que podían defender. Se dice que a la hora de delimitar la frontera también se utilizó este procedimiento: dar como territorio del país el que quedaba dentro del alcance de un proyectil de cañón en cada uno de los lados del río. Pero esto no es ni más ni menos que una realización práctica, 'a cañonazos', en lugar de 'a punta de compás', de lo que antes hemos definido como lugar geométrico.

Naturalmente el procedimiento se sofisticó algo más. Una comisión geográfico anglo-francesa examinó detalladamente los límites y redactó la propuesta final. Hay incluso quien afirma que la 'frontera a cañonazos' no es más que un mito geográfico. En realidad tenemos dos fuertes argumentos para pensar que no lo es. El primero resulta de nuestra propia búsqueda sobre [historia](#) y [alcance de la artillería fluvial](#). La anchura de la franja de tierra a cada lado del río es de 10 kilómetros, y ello coincide precisamente con el alcance de los cañones fluviales en la época en la que fue realizada la delimitación, en 1889. Aunque el alcance de los cañones hasta la primera mitad del siglo XIX oscila



Elipse.

Parábola.

Epicicloide.

## ALGUNOS LUGARES GEOMÉTRICOS NOTABLES

Las cónicas aparecen como lugares geométricos definidos por propiedades de puntos en el plano. Así la elipse puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos puntos fijos llamados focos, es constante. La realización práctica pasa por tomar dos circunferencias cuyos radios son de suma constante, por ejemplo  $a$  y  $b$ : los puntos en la intersección de ambas,  $C$  y  $D$ , estarán a distancia fija  $b$  de los centros de las mismas,  $A$  y  $B$ , que serán los focos de la elipse. Variando  $a$  se obtiene una elipse dada, y variando  $b$  distinto semieje mayor de esta.

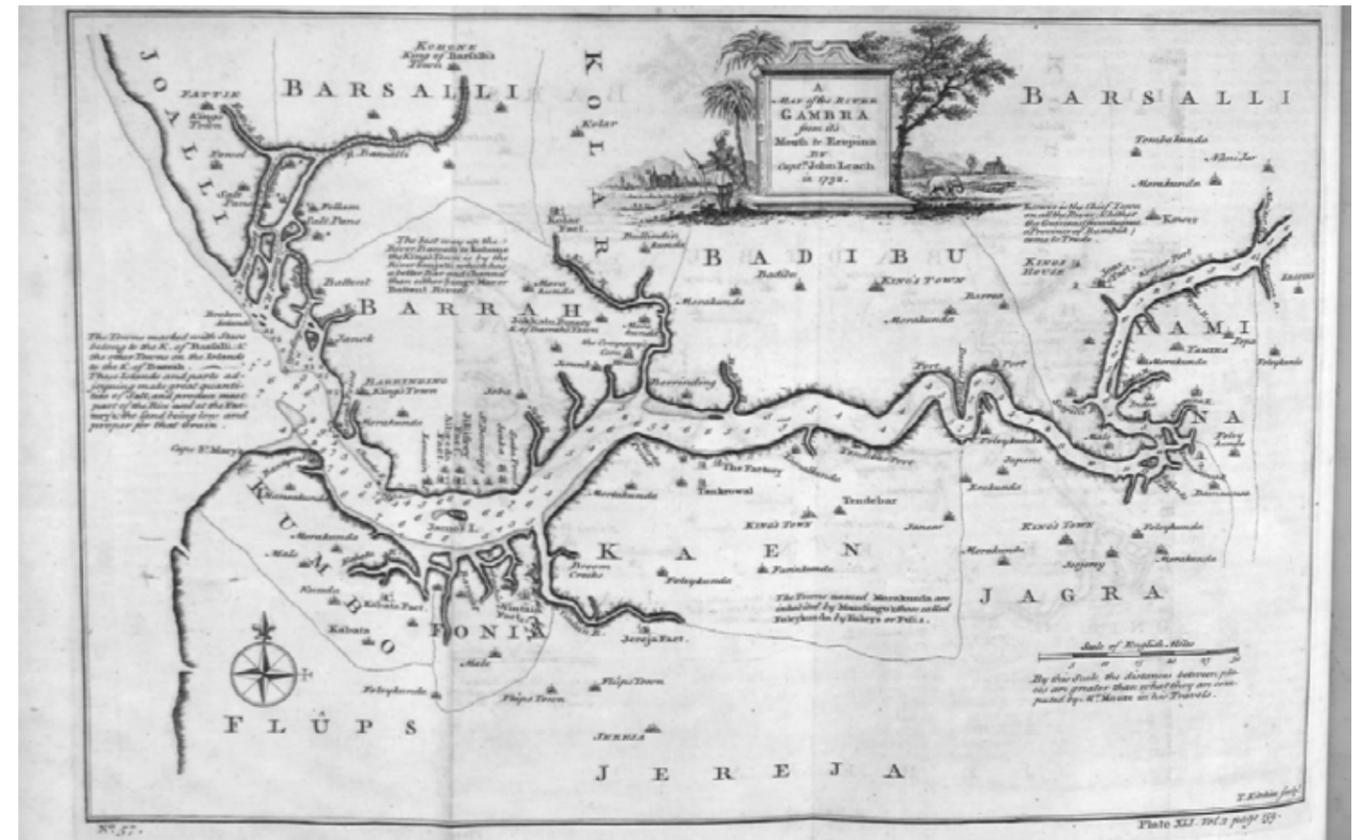
La parábola se define como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo llamado foco es igual a la distancia a una recta fija llamada directriz. La realización práctica se obtiene tomando triángulos isósceles  $BFP$ , con uno de los vértices,  $B$ , apoyados en la recta directriz y otro sobre el punto fijo  $F$ . Al ser isósceles los otros dos lados serán de igual valor, lo que da la condición de que el punto  $P$  este a igual distancia del foco fijo  $F$  que de la recta directriz.

Otros muchos lugares geométricos aparecen cuando consideramos propiedades relacionadas con el movimiento de un objeto respecto a otro. Así la epicicloide se define como el lugar geométrico dado por un punto sobre una circunferencia de centro  $C$ , que

va recorriendo el exterior de otra de centro  $A$ , de forma que ambas se mantienen tangentes por un punto cambiante,  $B$ . Para conseguir dibujarla hacemos que el punto  $B$  vaya moviéndose según el ángulo con el que se mueve el punto  $B$  con respecto a un punto fijo  $D$ , según un movimiento de rotación. Pero para conseguir que el efecto de movimiento sea real, debemos incrementar esa rotación con la proporción  $a/b$ , siendo  $a$  y  $b$  los radios de la circunferencia interior y exterior, y que nos dan, a su vez, la relación entre el perímetro de una y otra.

En el ejemplo representado (imagen de la izquierda) el radio de la circunferencia exterior (pequeña) es la mitad del de la circunferencia interior (grande), con lo que al rodar una sobre otra la pequeña da dos vueltas mientras recorre una vuelta de la grande al ser su perímetro la mitad. El lugar geométrico recorrido por un punto fijo moviéndose es el señalado en color rojo y da lugar a un caso particular de epicicloide que se denomina nefroide, por su parecido con un riñón.

Los lugares geométricos nos permiten resolver una multitud de problemas en campos tan diversos como la física, la arquitectura, la cartografía, la ingeniería, en particular la ingeniería mecánica y de control o hasta la química. Sin duda una herramienta matemática versátil.



Mapa de Gambia de 1732.

entre los 3 y los 5 kilómetros como máximo, dos mejoras tecnológicas como el rayado del ánima y la retrocarga hacen que suba drásticamente este alcance. El primero provoca mayor precisión y velocidad en el proyectil, mientras que el segundo evita tener que cargar los cañones por delante, lo cual limitaba su longitud a la que pudiera accederse desde la cubierta del barco. Al poderse cargar los proyectiles por la parte trasera, aumenta la longitud de los cañones, aunque el extremo de estos sobresalga por la borda del barco, que de esta forma llega a alcanzar los 10 kilómetros de tiro en la década de los 80 del siglo XIX. No fue hasta finales del XIX y principios del XX en que la extensión de los cañones de 305 mm de calibre, con un alcance de hasta 17-18 kilómetros, marcó un hito respecto a la relación de calibre/alcance. No es casualidad, por tanto, que el alcance máximo de los cañones en la época coincidiera con la extensión de la franja de tierra delimitada en el país a cada lado del río.

En segundo lugar, una frontera recta es fácil de delimitar y de trazar sobre el terreno. Basta tomar un punto y seguir una dirección fija, que usualmente era paralela a los paralelos terrestres, o perpendicular a ellos. En algunos casos, con ángulo de 45 grados. Así están delimitadas las fronteras del Sahara, Libia, Egipto, Sudán o Mali.

Sin embargo, una frontera definida por líneas curvas que depende de un accidente geográfico situado a 10 kilómetros, a veces tras impenetrable bosque, es difícil de delimitar y trazar sobre el terreno, dado que hay que recurrir en cada punto a la referencia fluvial. Únicamente la delimitación práctica mediante el método de los cañonazos, y su pervivencia como uso durante el tiempo permite adoptar este tipo de frontera como un criterio plausible de borde entre países.

Así que ya tenemos también el origen de nuestro peculiar lugar geométrico. El alcance y desplazamiento de las piezas de artillería, montadas sobre patrulleras fluviales fueron los causantes de esta insólita frontera curva. Un lugar geométrico hecho a cañonazos, aunque luego en la comisión geográfica mixta anglo-francesa enmendaran algunas partes según criterios de contexto o de sentido común. Hoy en día se considera inconcebible que una delimitación tan difícil de manejar se diera entre los dos países [1].

Referencias del artículo:

1. Geography and political power: The Geography of nations and states. Peter M. Slowe. Routledge Library Editions.
2. Geometría Analítica. Charles H. Lehmann. Editorial Limusa. 2012.